



最 优 控 制 报 告

三阶倒立摆系统的 LQR 控制

组 别: G14

成 员 1: 任泽华 3121154002

成 员 2: 李硕勋 3121354072

成 员 3: 姜宝翔 4120105083

成 员 4: 熊宇恒 3121154005

二〇二二 年 六 月

目录

一、一阶倒立摆仿真	3
(一)、一阶倒立摆模型	3
1.一阶倒立摆系统结构	3
2.一阶倒立摆建模	4
3.能控性能观性分析	5
(二)、控制方法比较	5
1.LQR 控制器	5
2.PD 控制器	6
3.MPC 控制器	8
(三)、总结	10
二、三阶倒立摆的建模	14
(一)、三阶倒立摆的系统描述	14
(二)、三阶倒立摆系统模型的推导	15
三、LQR 的控制实现	17
(一)、LQR 简介	17
(二)、LQR 最优控制策略	17
(三)、倒立摆系统的 LQR 最优控制设计	18
四、实验结果与分析	19
(一)、各种条件下的响应曲线	19
1. 微调模式（普通不平衡态）	19
2. 起摆：更关注小车位置	20
3. 起摆：关注所有角度	21
4. 起摆：关注第一角度	21
5. 起摆：关注输入能量	22
6. 起摆：关注输入能量和位置	22
7. 最优轨线	23
(二)、各指标对控制效果的影响分析	25
(三)、结论	25

一、一阶倒立摆仿真

(一)、一阶倒立摆模型

1.一阶倒立摆系统结构

控制系统为使用电机传动系统驱动的安装在滑块上的一阶倒立摆，系统示意图如图 1.

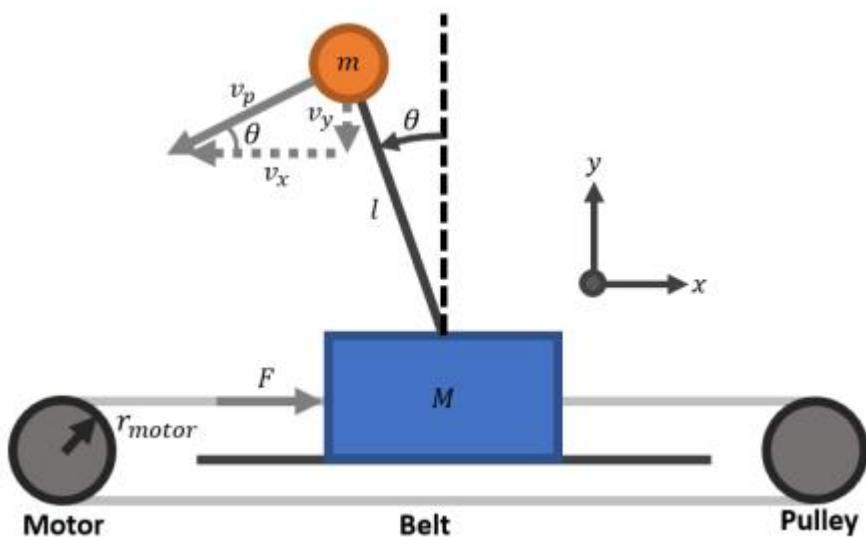


图 1 安装在滑块上的一阶倒立摆

如图 1 所示，电机传动系统驱动的安全在滑块上的一阶倒立摆由电机、传送带、滑块和倒立摆组成，系统各部分参数如表 1 所示。

表 1 系统参数

参数	定义	数值
M	滑块质量	0.5kg
m	摆锤质量	0.3kg
l	摆杆长度	0.3m
K_v	电机速度常数	$0.0186 \frac{rad}{s \cdot V}$
K_t	电机转速常数	$0.0135 \frac{Nm}{A}$
I_r	转子惯量	$0.000007 kgm^2$
N_r	齿轮比	26.9
R_w	绕组电阻	1.3Ω
r_m	电机轴半径	0.006m

我们使用如上安装在滑块上的一阶倒立摆系统比较 PD 控制器、LQR 控制器和 MPC 控制器三种控制方法的控制效果。

2.一阶倒立摆建模

对系统进行受力分析，得到系统总动能（K）和总势能（V）为：

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$$

$$V = mgl\cos\theta$$

其中：

$$v_x = \dot{x} - \dot{\theta}l\cos\theta$$

$$v_y = \dot{\theta}l\sin\theta$$

使用拉格朗日方程得到系统非线性模型：

$$L = K - V = \frac{1}{2}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}ml(l\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta - g\cos\theta)$$

使用欧拉-拉格朗日公式推导出对应两个自由度（滑块运动和倒立摆转动）的运动方程：

$$F = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = (M + m)\ddot{x} - ml(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = l\ddot{\theta} - \ddot{x}\cos\theta - g\sin\theta$$

在平衡点 ($\theta = 0$) 处将非线性模型线性化得到状态空间模型：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

其中：

$$x = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3.804 & -0.05591 & 0 \\ 0 & 45.38 & -0.6523 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{32} = \frac{R_wgm - R_wlm}{R_w(I_r m N_r^2 r_r^2 + M)}$$

$$A_{33} = -\frac{K_t K_v N_r^2 m}{R_w(I_r m N_r^2 r_r^2 + M)}$$

$$A_{42} = \frac{I_r R_w lm N_r^2 r_r^2 + M R_w g + R_w gm - R_w lm}{R_w l(I_r m N_r^2 r_r^2 + M)}$$

$$A_{43} = \frac{K_t K_v N_r^2 (m + M)}{R_w l(I_r m N_r^2 r_r^2 + M)}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_t N_r m}{R_w(I_r m N_r^2 r_r^2 + M)} \\ \frac{K_t N_r (m + M)}{R_w l(I_r m N_r^2 r_r^2 + M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1117 \\ 1.304 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.能控性能观性分析

使用 MATLAB 计算系统的能控性和能观性矩阵为:

$$C(A, B) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1117 & -0.0062 & 4.9593 \\ 0 & 1.3036 & -0.0729 & 59.1621 \\ 0.1117 & -0.0062 & 4.9593 & -0.5545 \\ 1.3036 & -0.0729 & 59.1621 & -6.5421 \end{bmatrix}$$

$$O(A, C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3.804 & -0.0559 & 0 \\ 0 & -0.2127 & 0.0031 & 3.804 \end{bmatrix}$$

能控性矩阵和能观性矩阵的秩都为 4, 系统在平衡点处能控且能观。

(二)、控制方法比较

1.LQR 控制器

线性二次型控制器 (Linear Quadratic Regulator, LQR) 是一种全状态反馈控制器, 给定性能 (即状态跟踪) 和控制力 (即执行器输入大小) 的权重的情况下, 优化地寻找控制增益 K_{LQR} 。LQR 控制器可以表示为成本函数的优化问题:

$$\min J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt, \mathbf{u} \in R^m$$

$$s.t. \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

其中平方半正定方阵 Q 和正定矩阵 R 分别表征性能权重和控制力权重。本次仿真中我们使用的权重矩阵为:

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

LQR 控制器增益和优化问题解 S 之间存在关系:

$$K = R^{-1}B^T S$$

由于优化问题可能存在多组解, 也对应的存在多个控制增益。其中使特征方程 ($A-BK$) 的特征值全为负值的增益 K 是唯一可以使系统稳定的增益。另外, 由于 LQR 控制是状态反馈控制器, 需要一个前置补偿器 \bar{N} 来计算状态的稳态值。本次仿真中使用的增益和前置补偿器为:

$$K_{LQR} = [-31.6228 \quad 113.3629 \quad -240.1784 \quad 33.5693]$$

$$\bar{N} = -31.6228$$

LQR 控制器的结构图如图 2 所示。

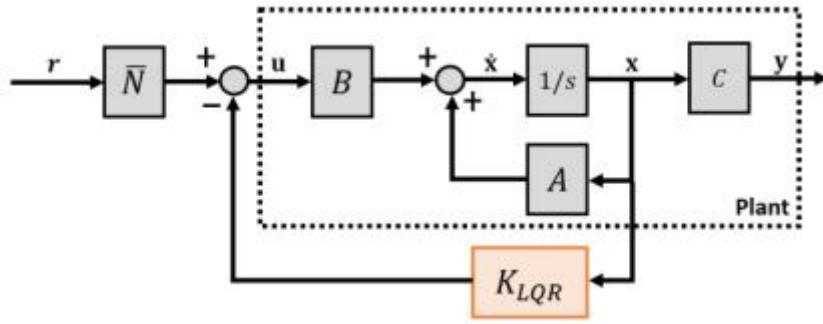


图 2 LQR 控制器

LQR 控制器的好处是易于调整控制器, 因为调整参数与系统的直观物理参数直接相关。然而, 当系统存在非线性或扰动时, LQR 控制器可能表现较差。

LQR 控制一阶倒立摆的仿真结果如图 3 所示。

2.PD 控制器

比例微分 (Proportional-Derivative, PD) 控制器是工业上常用的经典控制器, 不断计算参考点和测量输出的误差 $e = x - r$ 和误差率 $\dot{e} = \dot{x} - \dot{r}$, 并通过增益 K_p 和微分增益 K_d 决定控制输入:

$$u = K_p e + K_d \dot{e}$$

本次仿真使用两组 PD 控制器, 控制图如图 4 所示。

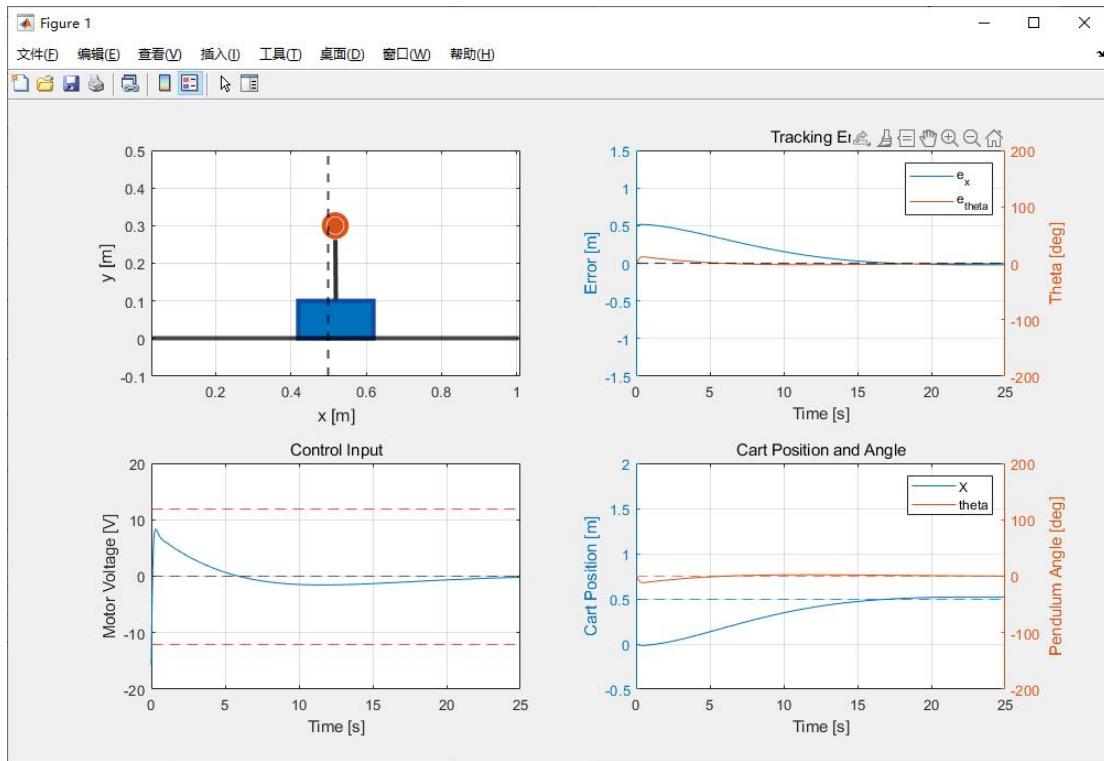


图 3 LQR 控制一阶倒立摆仿真结果

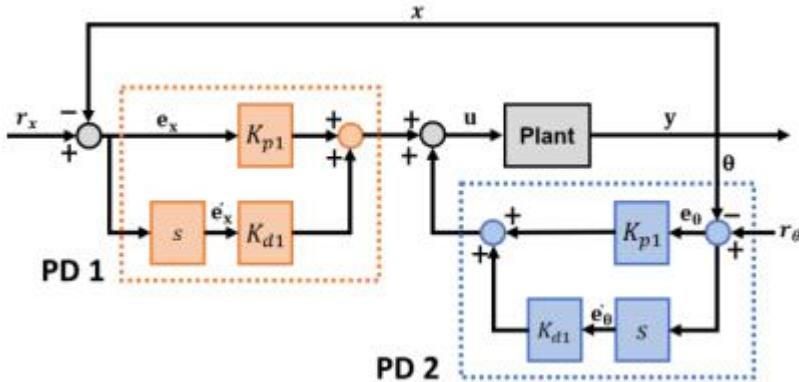


图 4 PD 控制器控制一阶倒立摆控制图

其中控制增益为：

$$K_{p1}, K_{d1} = -50, -400$$

$$K_{p2}, K_{d2} = 150, 100$$

控制输入为：

$$\mathbf{u} = K_{p1}\mathbf{e}_x + K_{d1}\dot{\mathbf{e}}_x + K_{p2}\mathbf{e}_\theta + K_{d2}\dot{\mathbf{e}}_\theta$$

PD 控制的优点是易于开发和设置，且计算成本极低。缺点是当涉及到多个 PD 控制器时很难调整。另外，当存在系统非线性或干扰的情况下 PD 控制器可能表现较差。

使用 PD 控制器控制一阶倒立摆的仿真结果如图 5 所示。

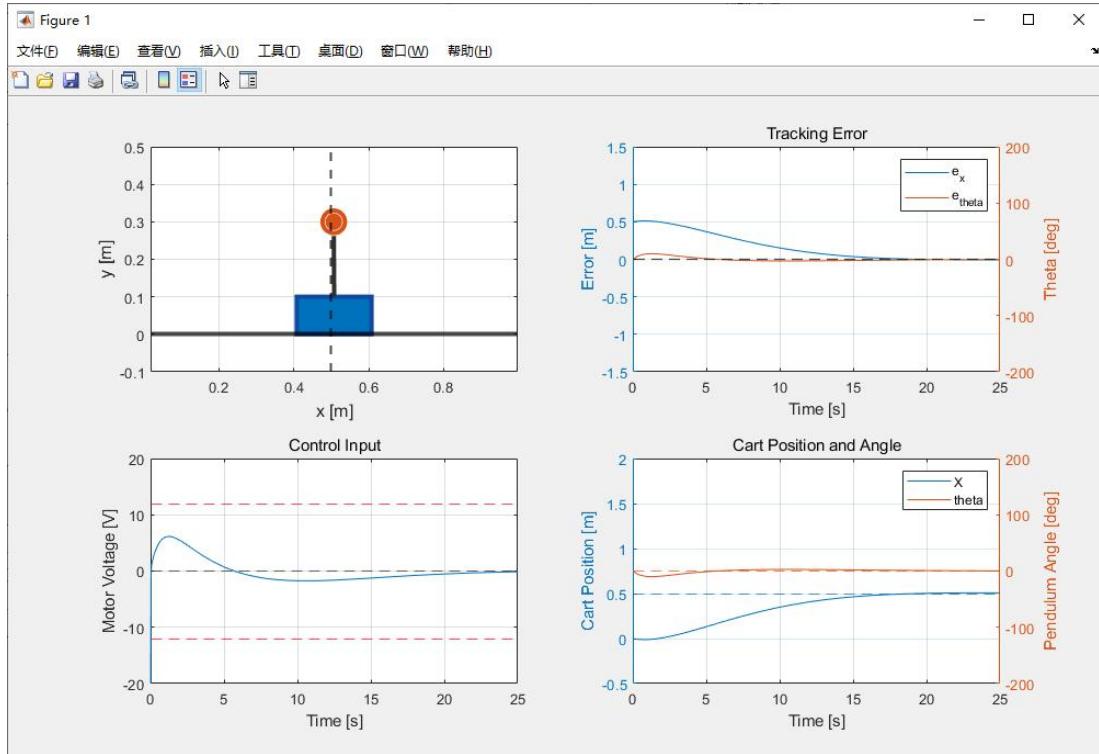


图 5 PD 控制器仿真结果

3.MPC 控制器

模型预测控制器（Model Predictive Controller, MPC）是一种相对现代的反馈控制器，通过循环优化预测范围内的成本函数循环计算控制输入值。MPC 可以表述为优化：

$$\begin{aligned} \min J &= |\mathbf{y}_t - \mathbf{y}| \\ \text{s. t. } &\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ &\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_{low} < \mathbf{u} < \mathbf{u}_{high}$$

$$\mathbf{y}_{low} < \mathbf{y}_t < \mathbf{y}_{high}$$

其中 \mathbf{y}_t 和 \mathbf{y} 分别是预测属于和测量输出。

MPC 的控制参数包括采样时间 T_S , 预测长度 P_h , 控制范围 C_h , 输入输出权重 \mathbf{W} 和输入输出控制边界 (\mathbf{u}_{low} , \mathbf{u}_{high} , \mathbf{y}_{low} , \mathbf{y}_{high})。本次仿真的控制参数为：

$$\begin{aligned} T_S &= 0.001s \\ C_h &= 10 \\ P_h &= 4000 \end{aligned}$$

$$u_{low} = -36V, u_{high} = 36V$$

$$y_{low} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty \\ -0.05rad \end{bmatrix}$$

$$y_{high} = \begin{bmatrix} \infty \\ 0.05rad \end{bmatrix}$$

控制图如图 6 所示。

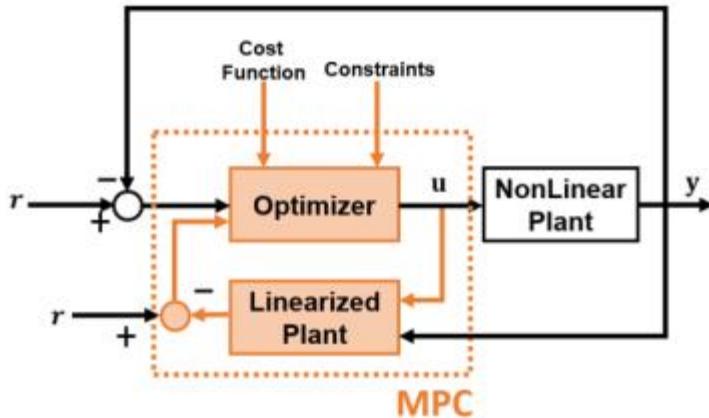


图 6 MPC 控制器控制图

仿真结果如图 7 所示。

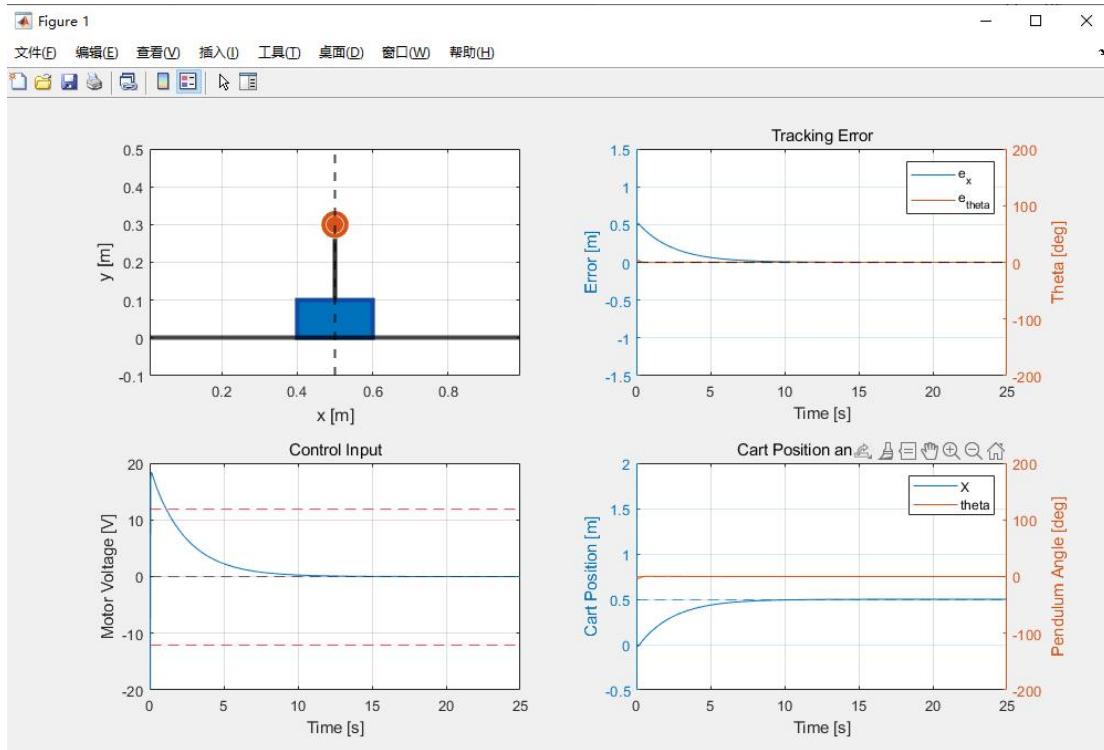


图 7 MPC 仿真结果

(三)、总结

本次仿真中使用 LQR、PD 和 MPC 三种控制器，且设置仿真时间为 25S，控制目标为 $x=0.5$, $\theta=0$ 。由上述仿真结果可以发现，三种控制方法都在仿真时间内达到了控制目标，且稳态误差均较小。

为比较三种控制方法，统计了三种控制方法的跟踪性能和计算时间消耗如表 2 所示。

表 2 跟踪性能和计算时间

		稳定时间 $t_{settle}(S)$	上升时间 $t_{rise}(S)$	过冲 OS	稳态误差 e_{ss}	计算时间 $t_{compute}(S)$
L	x	15.3	10.6	0.02	0.02	0.12
Q	θ	3.8	-	0.04	0.005	
R	\dot{x}	0.2	-	0.05	-0.001	
	$\dot{\theta}$	1.4	-	0.06	-0.002	
P	x	15.4	10.6	0.008	0.008	0.33
D	θ	11.1	-	0.05	0.004	
	\dot{x}	0.1	-	0.05	0.0	
	$\dot{\theta}$	3.2	-	0.05	-0.001	
M	x	7.2	4.8	0.0	0	76.9
P	θ	0.2	-	0.005	0	
C	\dot{x}	3.6	-	0.2	0	
	$\dot{\theta}$	0.47	-	0.4	0	

由表 2 可见，在所有跟踪性能上，MPC 都优于 PD 和 LQR,LQR 和 PD 的跟踪性能相近。计算时间消耗方面，LQR 计算时间是 MPC 的 0.16%，PD 计算时间是 MPC 的 0.43%，这是因为 MPC 需要更多的计算资源循环进行系统模型的预测和控制输入的优化。

图 8 到图 10 给出了三种控制方法的每个状态和控制输入随时间变化的曲线。

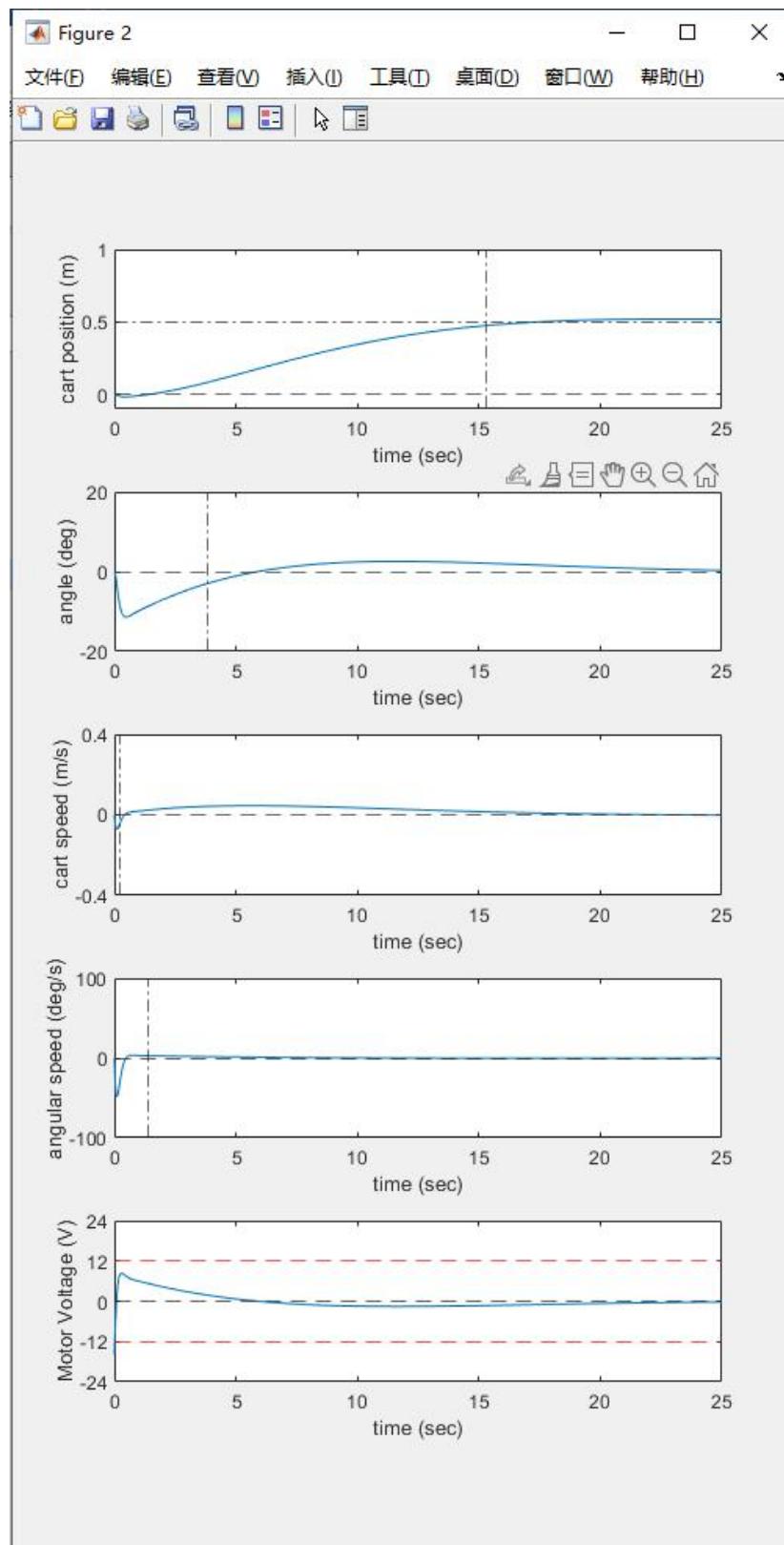


图 8 LQR 控制器状态和控制输入变化曲线

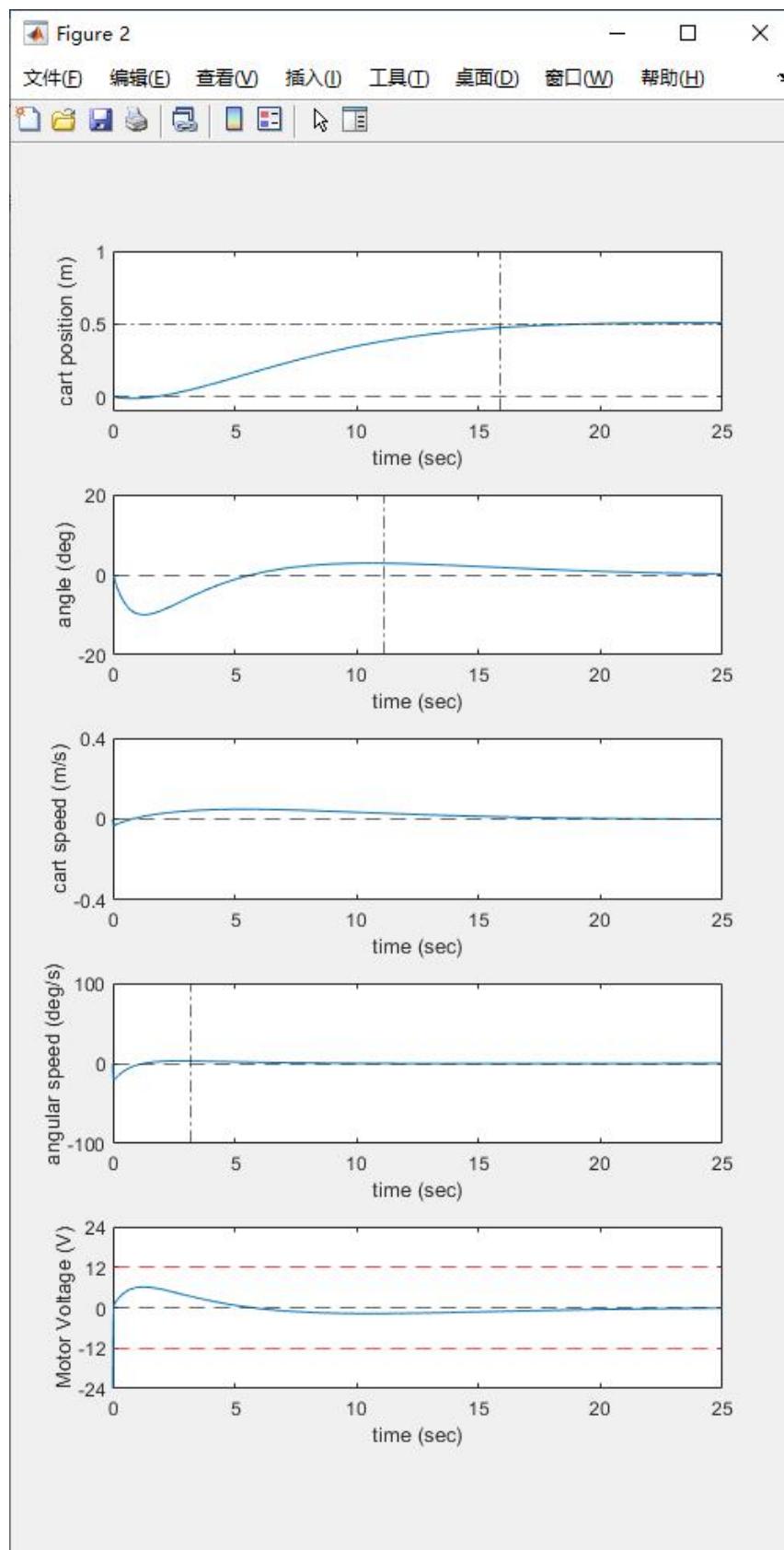


图 9 PD 控制器状态和控制输入变化曲线

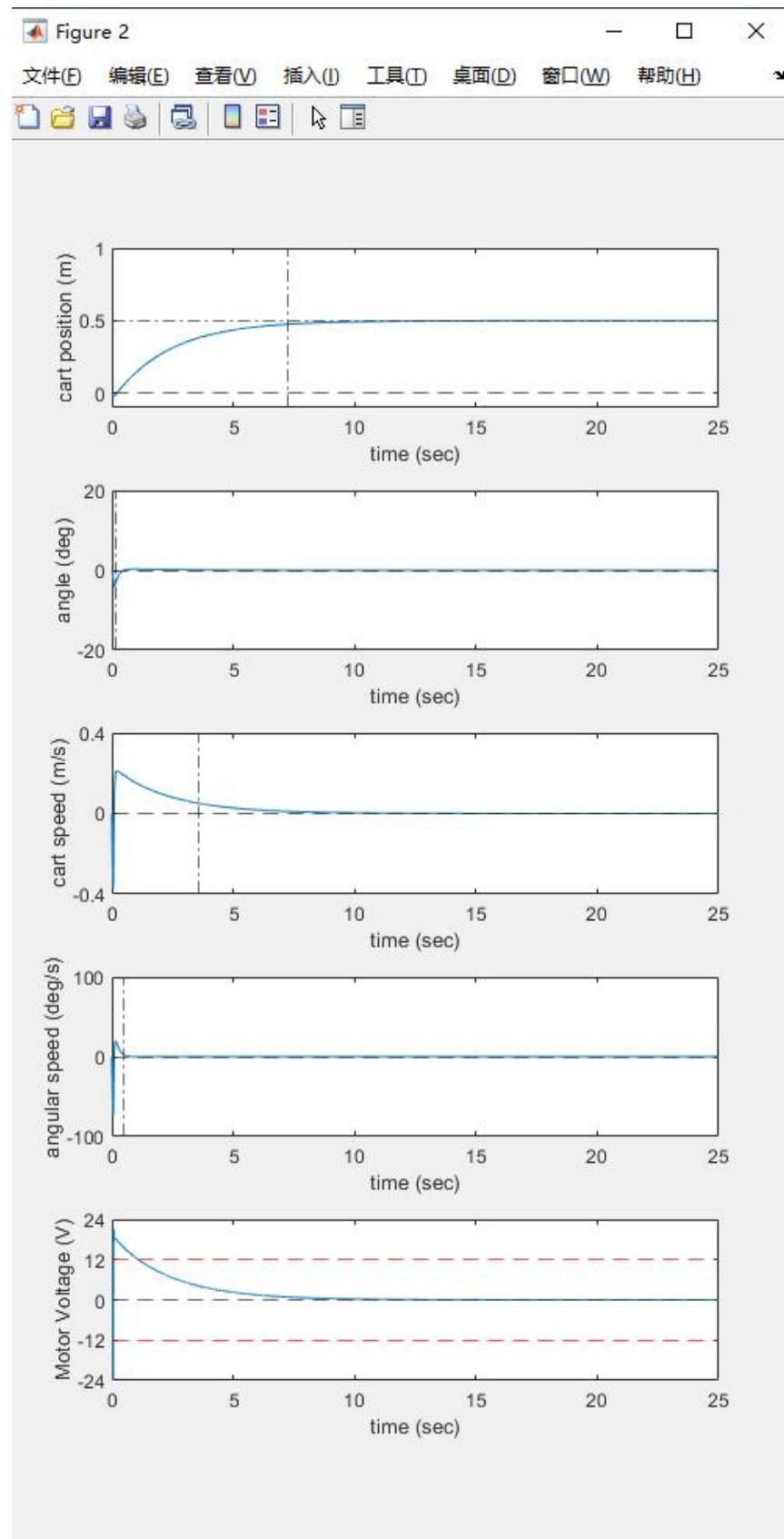


图 10 MPC 控制器状态和输入变化曲线

二、三阶倒立摆的建模

(一)、三阶倒立摆的系统描述

三阶倒立摆系统的模型如图 1 所示，该系统主要由沿轨道自由运动的小车和固定在小车上的摆杆组成，摆杆与摆杆之间，小车与摆杆之间通过转轴连接，各级摆杆可以绕各自的转轴在轨道所在的铅直平面内自由转动，并在转轴处有电位器分别用来测量上摆杆，中摆杆和下摆杆的角度变化，轨道一端装有用来测量小车位移的电位器。直流电机通过传送带控制小车在轨道上的运动，从而使摆杆稳定在竖直向上平衡点。

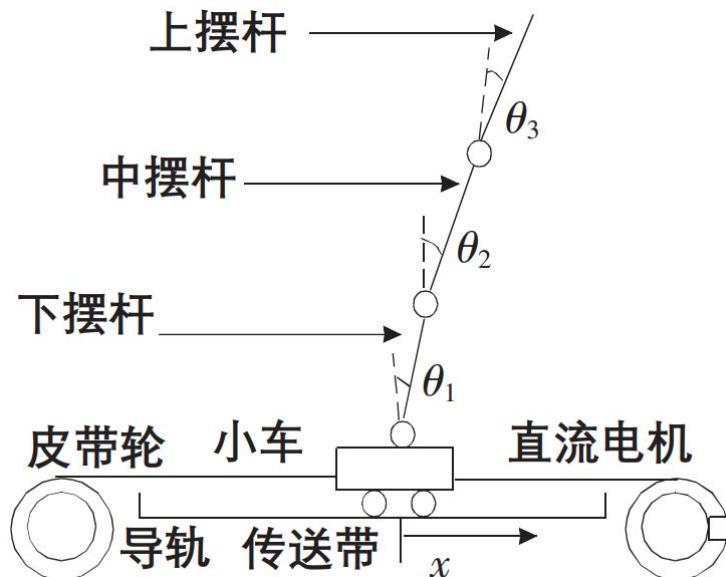


图 1 三阶倒立摆系统的模型

采用分析力学中的拉格朗日方程建立三阶倒立摆系统的数学模型。为明确物理意义和推导的方便，忽略了一些次要因素，做出如下假设：（1）除传送带外，整个系统看作刚体；（2）皮带轮和传送带之间无相对滑动，传送带无拉长现象，且传递作用的延迟忽略不计；（3）整个电路系统的传递延迟忽略不计，放大器和电位器是线性的；（4）小车运动过程中所受到的摩擦阻力正比于小车速度，摆杆转动时所受到的阻力矩正比于摆杆的角速度。定义系统各参数如表 1 所示。

表 1 三阶倒立摆系统物理参数

符号	物理意义	数值	符号	物理意义	数值
x	小车位移 被控变量 /m		l_1	下摆转轴 到其重心 的距离	0.2449 m
θ_1	下摆角位 移 被控变量 /rad		l_2	中摆转轴 到其重心 的距离	0.193 m

θ_2	中摆角位移	被控变量 /rad	l_3	上摆转轴到其重心的距离	0.03405 m
θ_3	上摆角位移	被控变量 /rad	J_1	下摆对质心的转动惯量	0.0119 kg
m_0	小车质量	2.4 kg	J_2	中摆对质心的转动惯量	0.0069 kg·m ²
m_1	下摆质量	1.323 kg	J_3	上摆对质心的转动惯量	0.0291 kg·m ²
m_2	中摆质量	1.389 kg	u	外部作用 N	
m_3	上摆质量	0.8655 kg	K_s	整个系统的输入转换增益	9.722 NV
L_1	下摆摆长	0.4002 m	f_0	小车与滑轨之间的摩擦系数	13.611 N·s/m
L_2	中摆摆长	0.332 m	f_1	下摆与转轴之间的摩擦系数	0.0045 N·s/m
L_3	上摆摆长	0.72 m	f_2	中摆与转轴之间的摩擦系数	0.0045 N·s/m
g	重力加速度	9.81 m/s ²	f_3	上摆与转轴之间的摩擦系数	0.0045 N·s/m

(二)、三阶倒立摆系统模型的推导

类比于一阶倒立摆，由总能量得到拉格朗日方程并使用欧拉-拉格朗日公式推导出四个自由度（滑块移动和三个摆杆转动）的运动方程：

$$H_1(\vec{z})\ddot{\vec{z}} = H_2(\vec{z}, \dot{\vec{z}})\dot{\vec{z}} + h_0\vec{z} + h_0u \#(1)$$

$$\vec{z} = (x, \theta_1, \theta_2, \theta_3)^T \#(2)$$

$$h_0 = (1000)^T \#(3)$$

其中：

$$H_1(\vec{z}) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \cos \theta_1 & a_2 \cos \theta_2 & m_3 l_3 \cos \theta_3 \\ a_1 \cos \theta_1 & b_1 & a_2 L_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) & m_3 L_1 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) \\ a_2 \cos \theta_2 & a_2 L_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) & b_2 & m_3 L_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_2) \\ m_3 l_3 \cos \theta_3 & m_3 L_1 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) & m_3 L_2 l_3 \cos(\theta_3 - \theta_1) & J_3 + m_3 l_3^2 \end{bmatrix} \#(4)$$

其中系数由下式给出：

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 \\ a_1 = m_1 l_1 + m_2 L_2 + m_3 L_1 \\ a_2 = m_2 l_2 + m_3 L_2 \\ b_1 = J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 + m_3 L_1^2 \end{array} \right\} \#(5)$$

$$\left. \begin{array}{l} H_2(\vec{z}, \dot{\vec{z}}) = \\ \begin{bmatrix} -f_0 & a_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 & a_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 & m_3 l_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 \\ 0 & -f_1 - f_2 & a_2 L_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 & m_3 L_1 l_3 \sin (\theta_3 - \theta_1) \dot{\theta}_3 \\ 0 & -a_2 L_1 \sin (\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1 + f_2 & -f_2 - f_3 & m_3 L_2 l_3 \sin (\theta_3 - \theta_2) \dot{\theta}_3 + f_3 \\ 0 & -m_3 L_1 l_3 \sin (\theta_3 - \theta_1) \dot{\theta}_1 & -m_3 L_2 l_3 \sin (\theta_3 - \theta_2) \dot{\theta}_2 + f_3 & -f_3 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \#(6)$$

$$h_3(\vec{z}) = [0 \quad a_1 g \sin \theta_1 \quad a_2 g \sin \theta_2 \quad m_3 g l_3 \sin \theta_3]^T \#(7)$$

(1) 中描述的非线性模型在零输入的垂直位置处线性化。状态向量定义如下：

$$X = [x \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \dot{x} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T$$

将线性模型以状态空间形式表示，如下所示：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & I_{4 \times 4} \\ E^{-1}H & E^{-1}G \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ E^{-1}h_0 \end{bmatrix} U = AX + BU \#(8)$$

$$Y = CX$$

其中：

$$E = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & m_3 l_3 \\ a_1 & b_1 & a_2 L_1 & m_3 L_1 l_3 \\ a_2 & a_2 L_1 & b_2 & m_3 L_2 l_3 \\ m_3 l_3 & m_3 L_1 l_3 & m_3 L_2 l_3 & J_3 + m_3 l_3^2 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 l_3 g \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -f_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_1 - f_2 & f_2 & 0 \\ 0 & f_2 & -f_2 - f_3 & f_3 \\ 0 & 0 & f_3 & -f_3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TIPS 状态方程(8)的系数矩阵如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12.4928 & -2.0824 & 2.2956 & -5.1127 & 0.0075 & 0.0024 & -0.0053 \\ 0 & 67.1071 & 65.2564 & -71.9704 & 14.0176 & 0.0039 & -0.1948 & 0.1659 \\ 0 & 144.5482 & -394.2536 & 272.1049 & 5.2021 & -0.4334 & 1.1287 & -0.7492 \\ 0 & -300.4564 & 512.8310 & -257.9198 & 10.8077 & 0.6476 & -1.3621 & 0.826 \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3.651 \ -10.012 \ -3.716 \ 7.720]^T$$

能控性矩阵和能观性矩阵的秩都为 8，与状态数量相同，因此系统在平衡点附近能控且能观。并且代入一组真实值后算得特征值不全为负，说明该系统不稳定，需要施加控制。

三、LQR 的控制实现

(一)、LQR 简介

LQR 即线性二次型调节器（Linear Quadratic Regulator— LQR），在现代控制理论中占据着十分重要的位置，其相关问题也一直受到控制界的普遍重视。由于线性二次型（LQ）这一数学模型的性能指标易于计算、分析和处理，且利用该数学模型设计得到的倒立摆系统的动态特性和鲁棒性较好，还可以得到线性反馈结构，因而在实际的系统设计中取得了广泛应用。美中不足的是，利用线性二次型方法实现最优控制时，其效果依赖于加权矩阵 Q 、 R 的选取。如果选取不当，则求解得到的控制律往往无法满足实际系统的性能需求，当然也谈不上“最优”。

(二)、LQR 最优控制策略

不失一般性，假设给定系统为线性定常系统，其状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) \end{cases}, \quad x(t_0) = x_0$$

其中， x 为 n 维状态向量， u 为 r 维输入向量， y 为 m 维输出向量， A, B, C 分别为 $n \times n, n \times r, m \times n$ 维系数矩阵。

相应的二次型性能指标函数为：

$$\min_u = \frac{1}{2} y^T(t_f) F y(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [y^T(t) Q(t) y(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt$$

二次型目标函数的第一项 $\frac{1}{2} y^T(t_f) F y(t_f)$ 表示稳态误差, F 为其加权矩阵; 第二项

$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [y^T(t) Q(t) y(t)] dt$ 表示暂态误差的总度量, $Q(t)$ 为其加权矩阵且是时变的;

第三项 $\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t) R(t) u(t)] dt$ 表示暂态过程中消耗的控制能量总和, $R(t)$ 为其加

权矩阵且是时变的。 $Q(t)$ 是半正定阵, $R(t)$ 是正定阵, 即 $Q(t) \geq 0, R(t) > 0$ 。

当系统受到外界干扰并偏离零状态时(外界干扰已消失), 施加什么样的控制, 可以使得系统状态回复至零状态且使得性能函数最小呢? 这就是我们所说的最优控制。由最优控制的理论我们知道, 使得函数最小的最优控制律为:

$$U^* = -R^{-1}B^T P X = -K X$$

上式 P 是 **Riccati** 方程的解, K 是线性反馈增益矩阵。我们求解代数 **Riccati** 方程:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

可以获得 P 和线性反馈增益矩阵 K :

$$K = R^{-1}B^T P = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$$

(三)、倒立摆系统的 LQR 最优控制设计

在一般的最优控制问题中, Q 和 R 都取为对角阵。这里为不失一般性, 我们也遵循这一取法。在确定 Q 和 R 时, 我们选用了仿真试凑法。该方法的基本原理是: 首先进行分析, 初步选取 Q 和 R , 通过计算机仿真判断其是否符合设计要求。若符合要求, 则停止仿真, 当前的 Q 和 R 就是实际控制系统所需要的加权阵。然后利用计算机可以非常方便地求出最优反馈增益矩阵 K , 把 K 代入到实际系统的控制器参数中就完成了控制器的设计。若不符合要求, 则应当重新选取 Q 和 R 并重复仿真以进行判断, 直至符合实际系统的性能指标要求为止。

通过对倒立摆系统的 LQR 最优控制设计方法进行分析, 我们可以找出系统的动态响应与 Q 和 R 的选取之间的规律: 当 Q 不变而 R 减小时, 倒立摆系统的调整时间与超调量减小, 上升时间与稳态误差增大; 当 R 不变而 Q 变大时, 调整时间与超调量减小, 摆杆的角度变化也同时减小, 但上升时间与稳态误差却同时增大。显然, 当 Q 和 R 的变化与上述的两种情况相反时, 结论也恰好相反。

为保证倒立摆的控制目标—稳定性达标, 我们针对三阶倒立摆系统在几种不同的加权矩阵情况下的稳定性进行了测试。最终选择的 Q 矩阵和 R 矩阵分别为:

$$Q = \begin{bmatrix} 400 & & & & & \\ & 6000 & & & & \\ & & 700 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 140 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0.1 \end{bmatrix}; R=1$$

相应的最优增益矩阵 K 为:

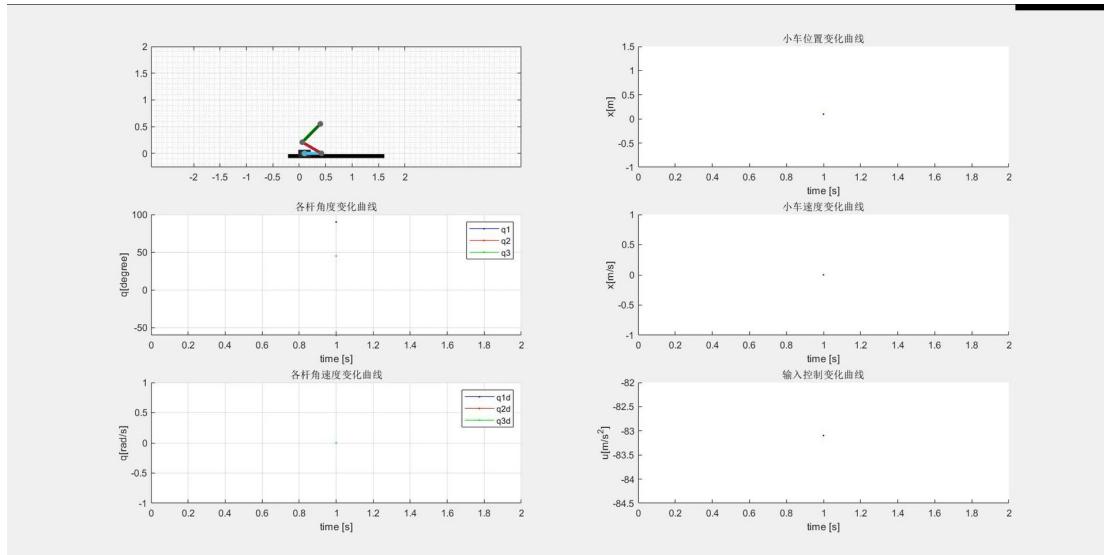
$$K = 10^3 \times [-0.0200 \quad -0.3296 \quad 0.8522 \quad -3.5432 \quad -0.0458 \quad -0.1442 \quad -0.0777 \quad -0.4105]$$

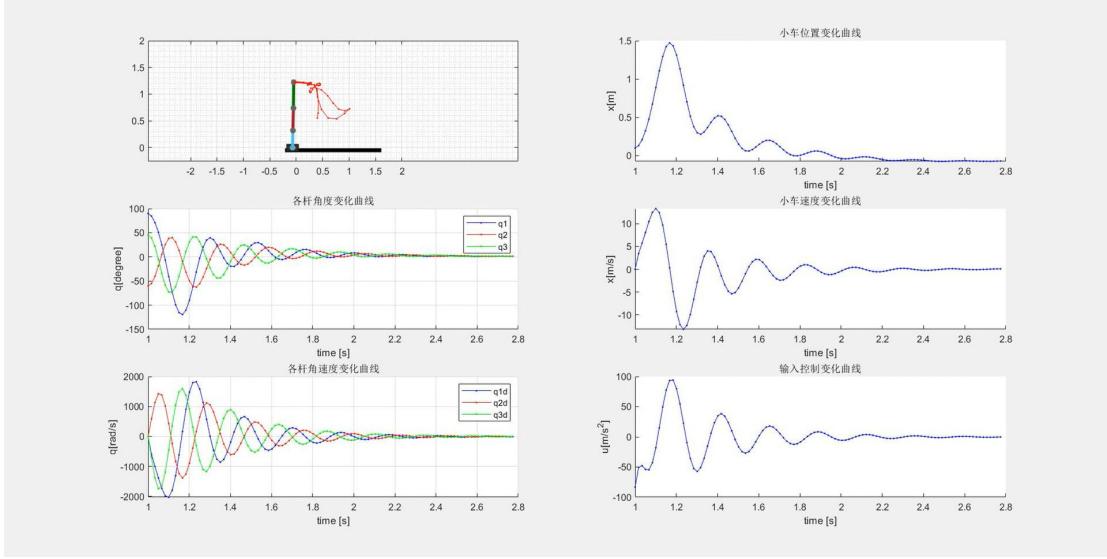
四、实验结果与分析

(一)、各种条件下的响应曲线

1. 微调模式 (普通不平衡态)

此模式下使得倒立摆处于轻微不平衡态, 三个夹角分别为: 90° 、 45° 、 30° 。
 $Q_{11}=700$ $Q_{22}=3000$ $Q_{33}=3000$ $Q_{44}=3000$ $R=1$
表明此时更关注倒立摆的三个角度 (同等重要)





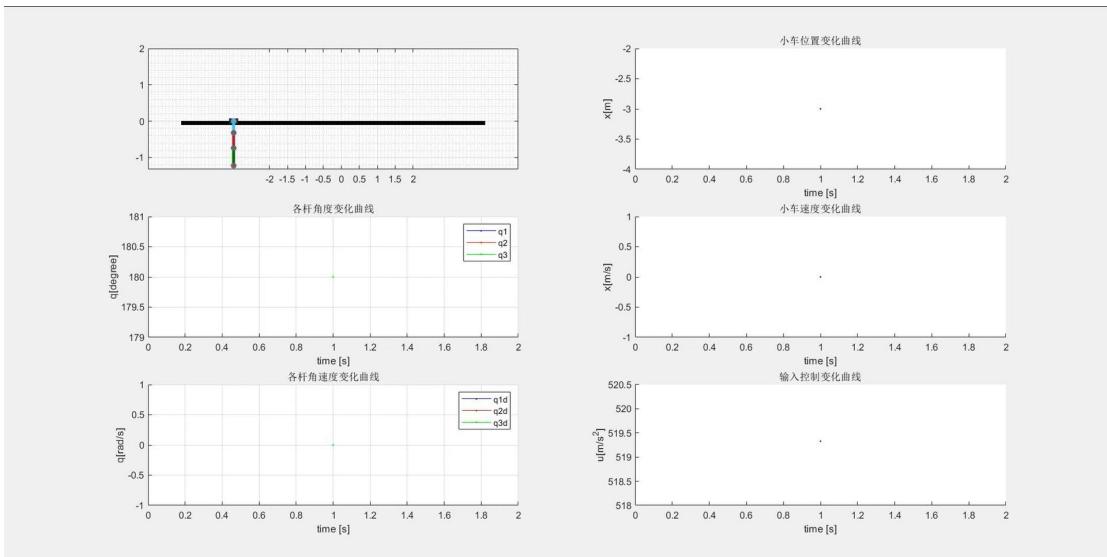
可以看出系统在 2 秒内趋于稳定，调节曲线光滑平坦，超调量小。
说明 LQR 控制器在微小变化的调整中效果很好。

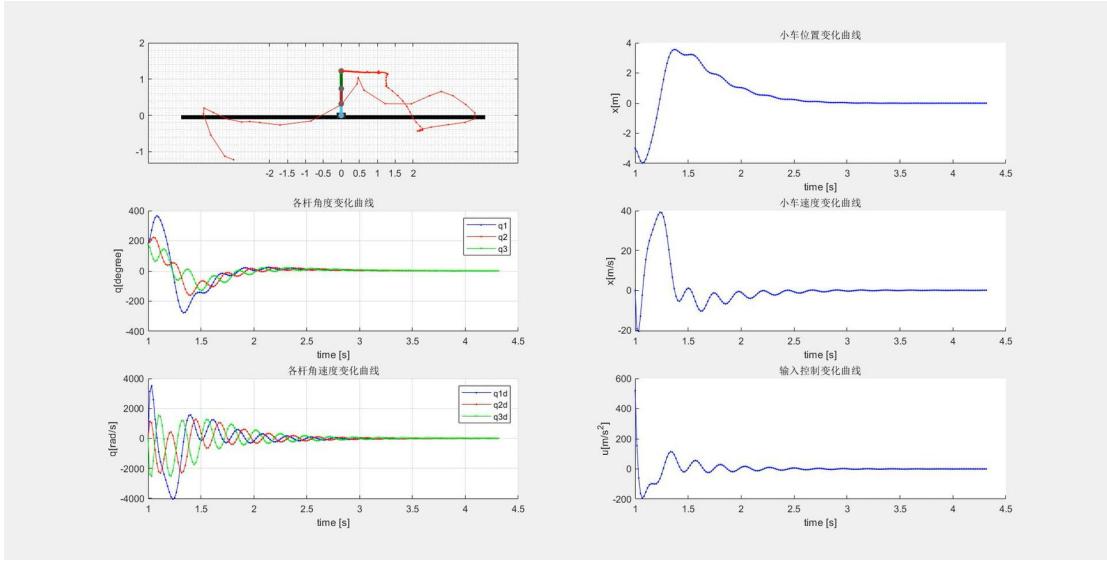
2. 起摆：更关注小车位置

此模式下小车初始处于倒悬状态，需要施加控制以起摆。

$$Q_{11}=3000 \quad Q_{22}=700 \quad Q_{33}=700 \quad Q_{44}=700 \quad R=1$$

表明此时更关注小车位置，其次是角度，三个角度同样重要。



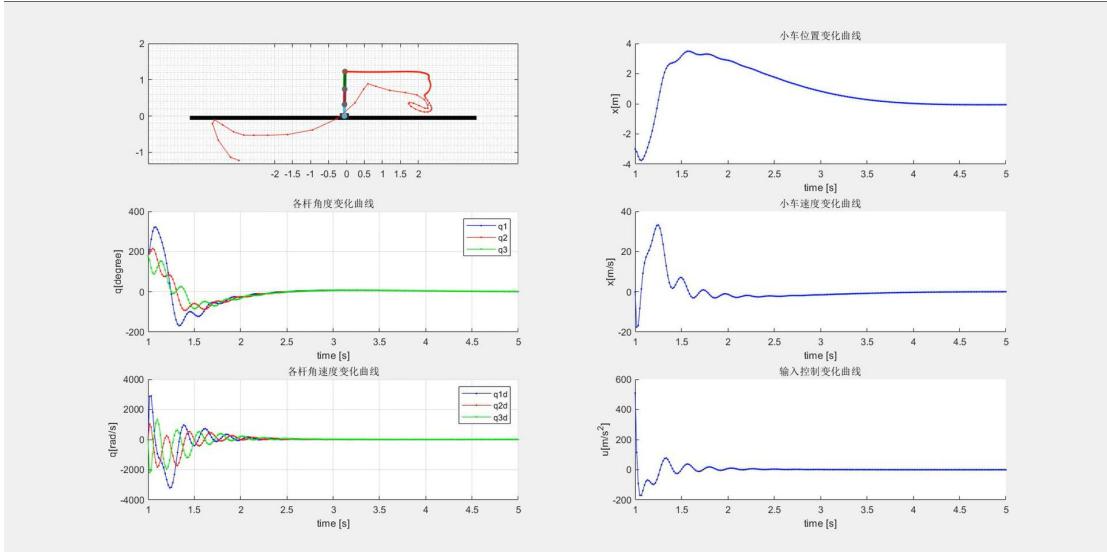


可以看出，系统在 3 秒内趋于稳定，由于关注小车位置，所以小车横向移动区间较小，位置的变化也相对平稳。输入量初始值偏大，可能会超过实际控制器的输出阈值。

3. 起摆：关注所有角度

$$Q_{11}=700 \quad Q_{22}=3000 \quad Q_{33}=3000 \quad Q_{44}=3000 \quad R=1$$

此时更关注角度，此控制和 1 中微调的参数相同。

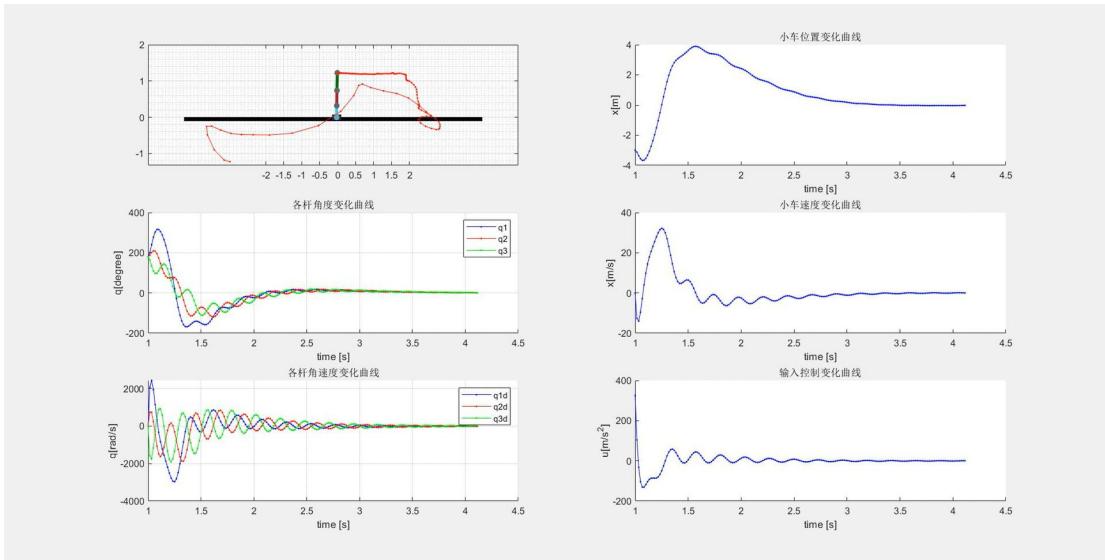


与上一节相比，角度的变化更平缓，同时角度在 2.5 秒内就趋于稳定，后面几乎为向零点的平行移动。说明关注角度的情况下更有利于尽快平衡。

4. 起摆：关注第一角度

$$Q_{11}=600 \quad Q_{22}=1000 \quad Q_{33}=500 \quad Q_{44}=100 \quad R=1$$

此时更关注第一角度，即第一个摆锤和竖直方向的夹角，二、三角度次之。

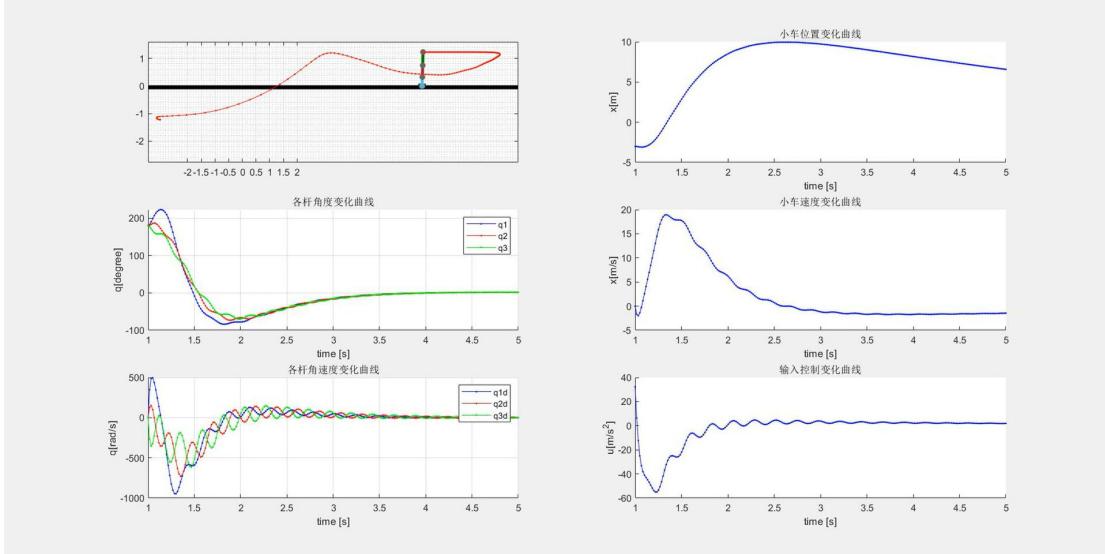


对三个角度关照不同时，系统也在 3 秒内趋于稳定，而且最大输出控制仅为上一节的 $2/3$ ，说明此方法有助于节省能量。

5. 起摆：关注输入能量

$$Q_{11}=1 \quad R=10$$

对于位置、角度都不关心、 $R=10$ 远大于 Q ，此时目标时控制总能量最小。

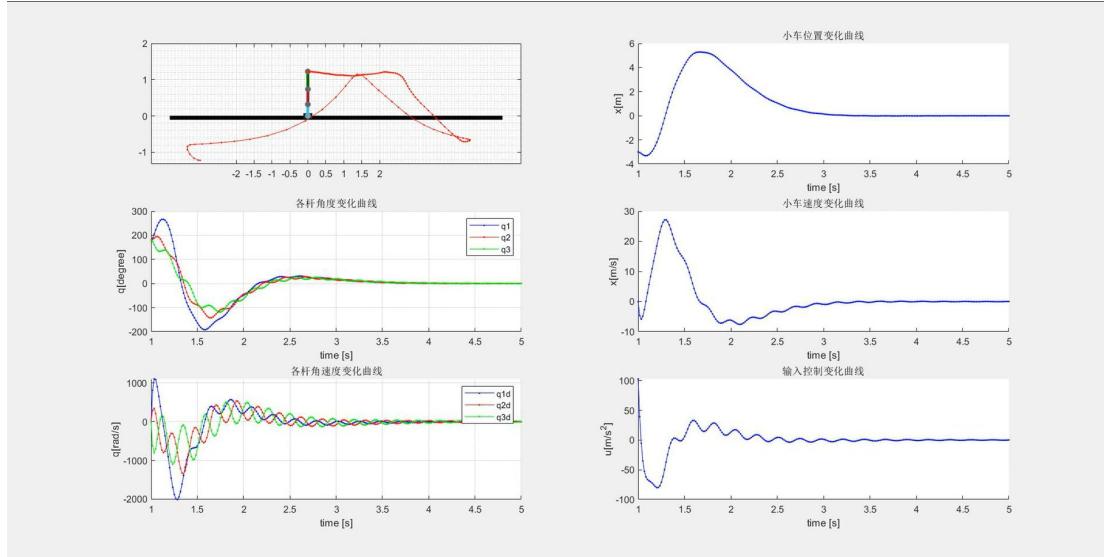


在能量最小时，可以看到输出控制能量比上面小了一个数量级。代价就是小车移动范围变得超长。

6. 起摆：关注输入能量和位置

$$Q_{11}=600 \quad R=10$$

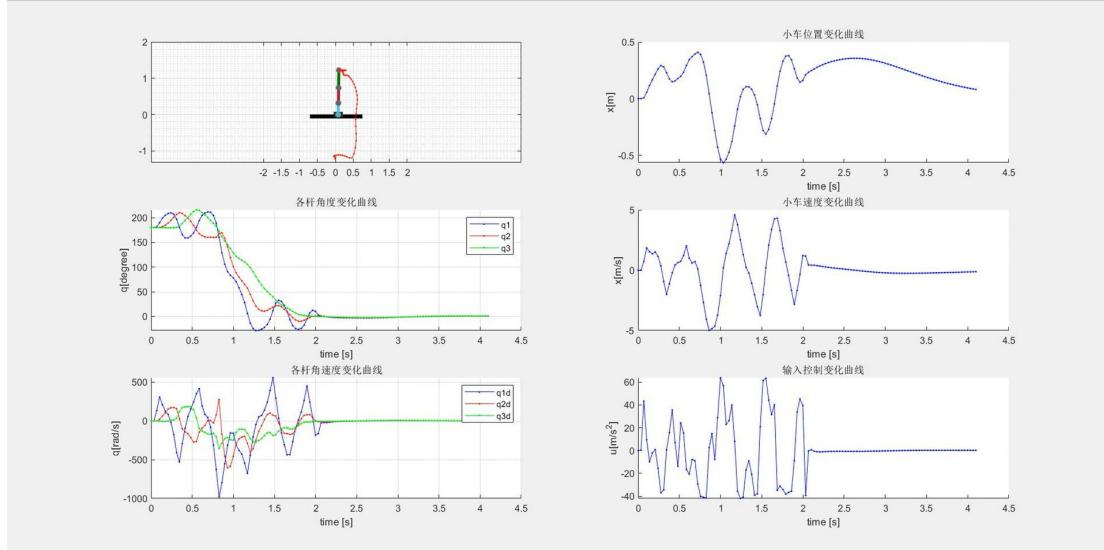
此时加入对小车位置的限制。



此时可以看到输出控制量也远小于前几节，而且小车位移范围急速变小。在最小能量和最小移动范围两个目标之间找到了一个比较好的权衡。

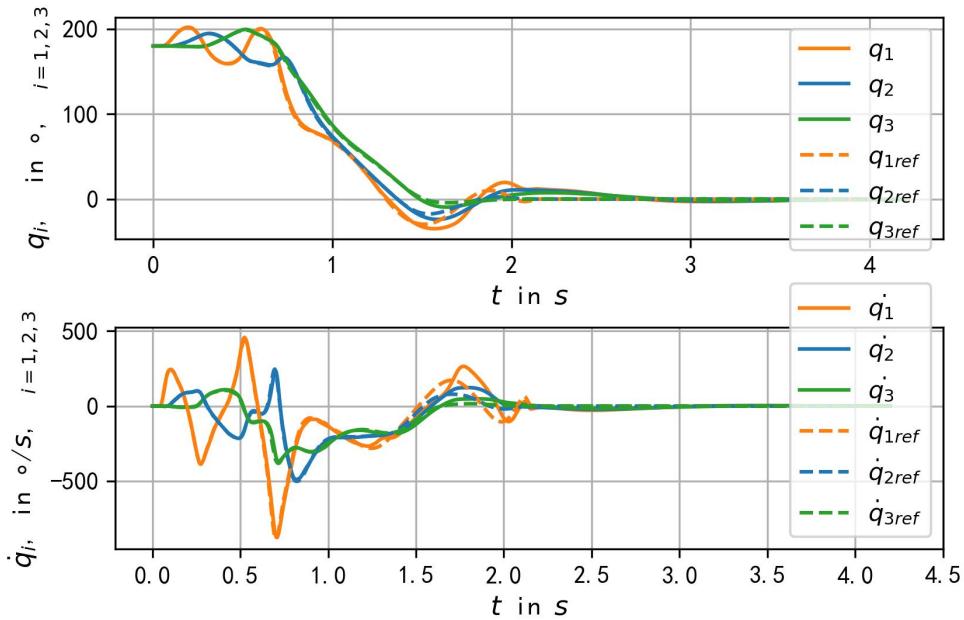
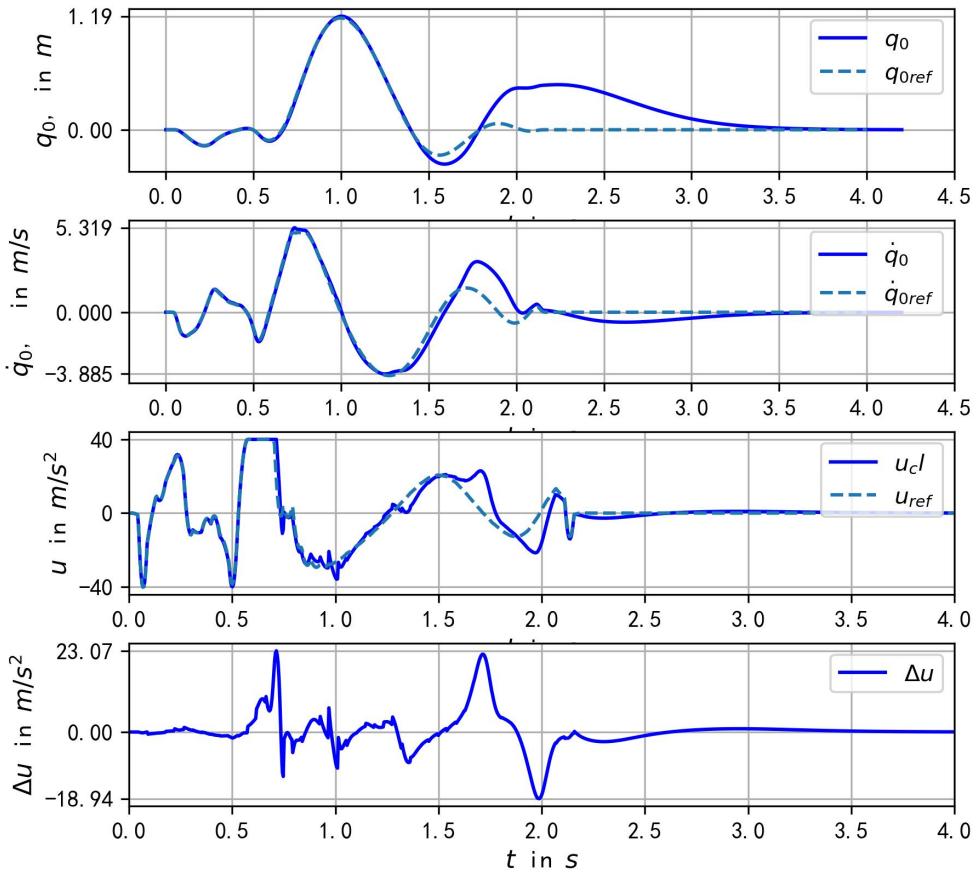
7. 最优轨线

(原轨线使用 MPC 算法生成，使用 LQR 做轨迹跟踪)



可以看出此控制不愧为最优，其中各指标都非常优秀。需要注意的是，此时输出量变化特别剧烈，所以对控制器的性能提出了比较高的要求。

下图是 LQR 对 MPC 控制曲线的跟踪结果，可以看到，LQR 可以对控制曲线作出很好的拟合跟踪。



(二)、各指标对控制效果的影响分析

下表为系统时域动态特性受 q_i ($i=1, 2, 3, 4$) 影响的变化趋势， t_d 为延迟时间， t_p 为峰值时间， t_s 为调节时间， Δ 为超调量， \uparrow 表示增大， \downarrow 表示减小， $-$ 表示不变。

由表可知：

- (1) 对于小车位移 x 和各个摆杆角位移 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, q_1$ 和 q_2 的影响作用较大， q_3 的影响次之， q_4 影响作用近似于零；
- (2) 对于系统时域动态特性中的延迟时间 t_d ，峰值时间 t_p 和调节时间 t_s ， q_1 的影响作用最大， q_2, q_3, q_4 的影响作用依次减弱；
- (3) 对于系统的超调量 Δ ， q_2 的影响作用最大， q_1, q_3 和 q_4 的影响作用相对较小。

综合看来， q_1 和 q_2 对系统各项特性的影响作用最大， q_3 的影响次之， q_4 影响作用最小。

q_i 变化情况	小车位移 x	下摆杆摆角 θ_1
q_1 由小变大	$t_d \downarrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \downarrow$	$t_d \downarrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \downarrow$
q_2 由小变大	$t_d \uparrow, t_p \uparrow, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$	$t_d \uparrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \downarrow$
q_3 由小变大	$t_d-, t_p \uparrow, t_s-, \Delta \uparrow$	$t_d-, t_p-, t_s \uparrow, \Delta \downarrow$
q_4 由小变大	$t_d-, t_p-, t_s-, \Delta-$	$t_d-, t_p-, t_s-, \Delta-$
对 t_d 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$	$q_1 > q_2 > q_3 > q_4$
对 t_p 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 > q_4$	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$
对 t_s 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$	$q_1 > q_2 > q_3 > q_4$
对 Δ 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 > q_4$	$q_2 > q_1 > q_3 > q_4$
q_i 变化情况	中摆杆摆角 θ_2	上摆杆摆角 θ_3
q_1 由小变大	$t_d \downarrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \downarrow$	$t_d \downarrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \uparrow$
q_2 由小变大	$t_d \uparrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \downarrow$	$t_d \uparrow, t_p \downarrow, t_s \downarrow, \Delta \downarrow$
q_3 由小变大	$t_d-, t_p-, t_s-, \Delta \downarrow$	$t_d-, t_p-, t_s-, \Delta \downarrow$
q_4 由小变大	$t_d-, t_p-, t_s-, \Delta-$	$t_d-, t_p-, t_s-, \Delta-$
对 t_d 的影响程度	$q_2 > q_1 > q_3 > q_4$	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$
对 t_p 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$
对 t_s 的影响程度	$q_1 > q_2 > q_3 = q_4$	$q_2 > q_1 > q_3 > q_4$
对 Δ 的影响程度	$q_2 > q_1 > q_3 > q_4$	$q_2 > q_1 > q_3 > q_4$

(三)、结论

1. 对实验结果分析可知，该系统的系统矩阵 A 所有的特征值均为正，是一个不稳定系统。
2. 对闭环系统矩阵 A_C 进行能控能观性分析的结果表明，系统完全能控，完全能观。
3. LQR 控制中最关键的环节是权重矩阵 Q 和 R 的选择，本项目中的主要被控量为系统的输出量，故最终的 Q 矩阵设置如下： $Q=\text{diag}(600, 1000, 500, 100, 0, 0, 0, 0)$ ；不失一般性， R 矩阵设置为 1。
4. 求解 LQR 问题的 Riccati 方程，得到

$$K=[26.4575 \ -89.2095 \ 88.9158 \ 187.7696 \ 31.0493 \ 10.9616 \ 29.0913 \ 21.2290]^\top$$